

Megint a gótikus ívről

Korábban volt már szó ilyesmiről a

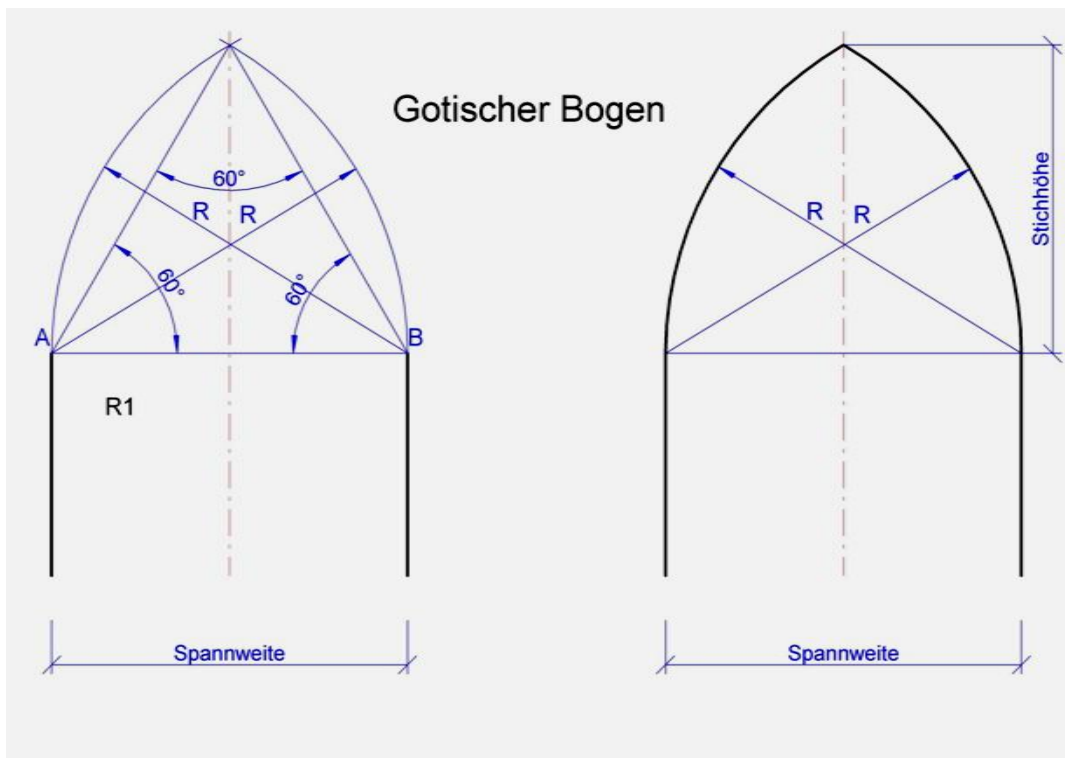
~ *Csúcsívek rajzolása*

és

~ *A gótikus ablak feladatáról*

című dolgozatainkban. Most továbbvisszük a témát.

Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra – forrása: [1]

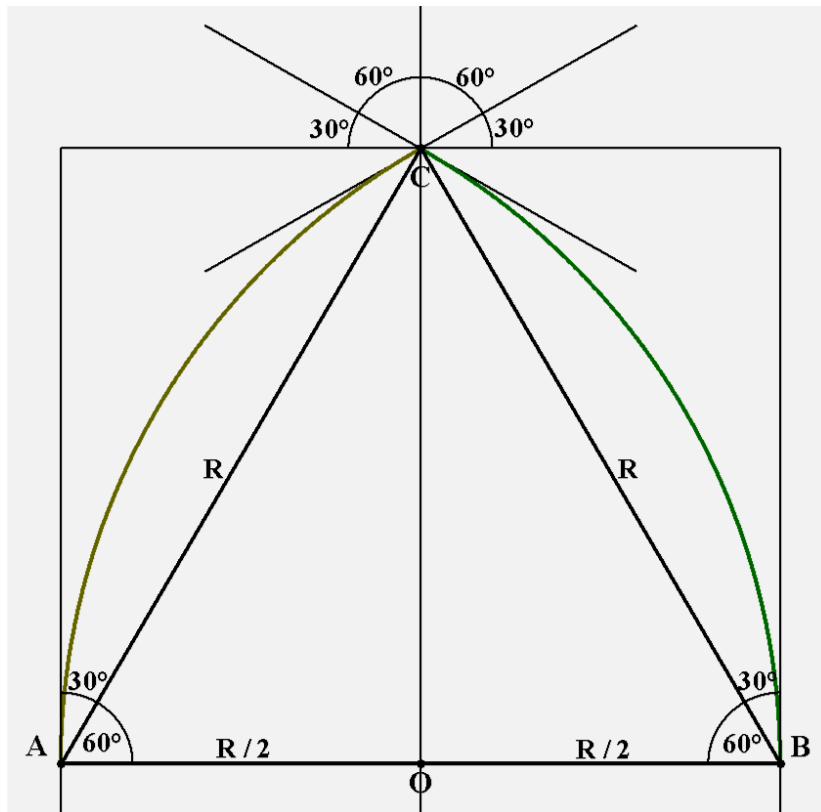
Erről könnyű leolvasni, hogy úgy szerkesztjük meg, hogy egy **AB** egyenes szakasz két végpontjából körívet rajzolunk $R = AB$ sugárral. Az így kapott síkidom egy görbevonalú háromszög, amit „gótikus ablak” - nak is nevezhetünk. A továbbiakban ezen síkidom tulajdonságait vesszük közelebbről is szemügyre, feladatokon keresztül.

1. feladat

Határozzuk meg a gótikus ablak - síkidom oldalai által közbezárt belső szögeket!

Megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Erről leolvasható, hogy a görbevonaltú háromszög csatlakozó oldalai által bezárt belső szögek 90° , 90° , 120° ; ugyanis e szögeket a megfelelő érintők zárják be.

2. feladat

Határozzuk meg a gótikus ablak - síkidom kerületét és területét!

Megoldás

Az **AB** szakasz hossza: $\overline{AB} = R$;

az **AC** és **BC** ívek hossza: $\overline{AC} = \overline{BC} = R \cdot \frac{\pi}{3}$.

A síkidom kerülete ezek összege:

$$K = R + 2 \cdot R \cdot \frac{\pi}{3} = R \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right), \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{K = R \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \approx 3,0944 \cdot R.}} \quad (1)$$

A síkidom területe a szabályos háromszög és a két körszelet területének összege:

$$T = T_h + 2 \cdot T_{ksz} ; \quad (2)$$

ahol:

$$T_h = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2, \quad (3)$$

továbbá a körszelet területe egyenlő a körcikk és a háromszög területének különbségével:

$$T_{ksz} = T_{kc} - T_h = R^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \quad (4)$$

így (2), (3) és (4) szerint:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 + 2 \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \text{ tehát:}$$

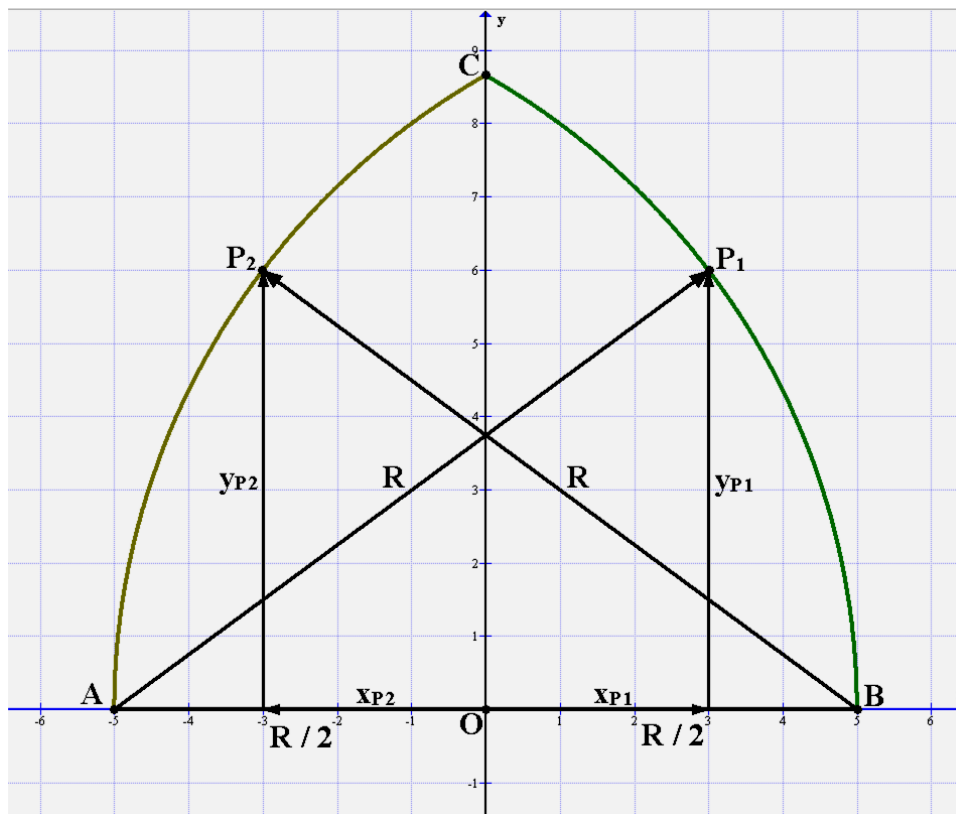
$$\underline{\underline{T = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot R^2 \approx 0,6142 \cdot R^2.}} \quad (5)$$

3. feladat

Írjuk fel a gótikus ív egyenletét!

Megoldás

Ehhez tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

A körívek P_1 és P_2 pontjaira, *Pitagorász* tételével is:

$$x_{P_1} = \sqrt{R^2 - y_{P_1}^2} - \frac{R}{2}, \quad x_{P_2} = -\left(\sqrt{R^2 - y_{P_2}^2} - \frac{R}{2}\right). \quad (6)$$

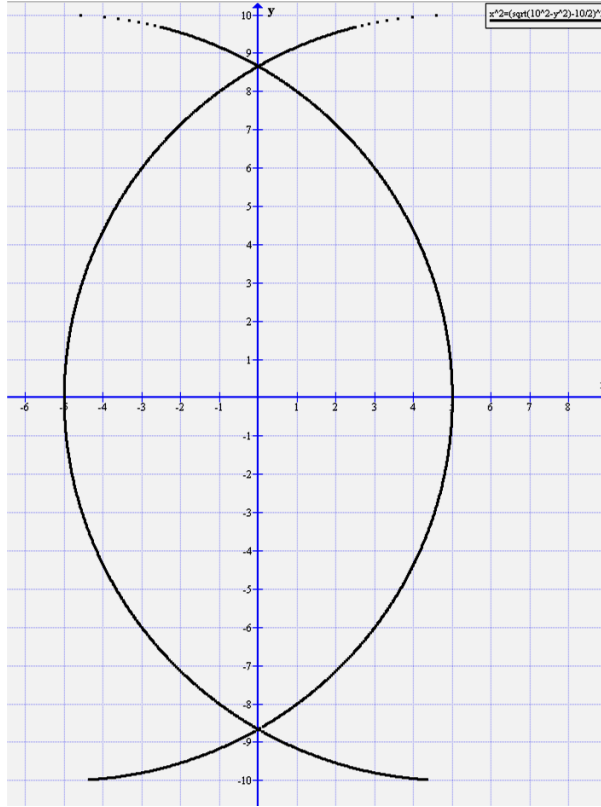
Most emeljük négyzetre (6) egyenleteit! Ekkor:

$$(x_{P_1})^2 = \left(\sqrt{R^2 - y_{P_1}^2} - \frac{R}{2}\right)^2, \quad (x_{P_2})^2 = \left[-\left(\sqrt{R^2 - y_{P_2}^2} - \frac{R}{2}\right)\right]^2; \quad (7)$$

az indexeket elhagyva:

$$\underline{x^2 = \left(\sqrt{R^2 - y^2} - \frac{R}{2}\right)^2.} \quad (8)$$

Ábrázoljuk most a (8) függvényt a **Graph** - fal, az $R = 10 \text{ cm}$ adattal – ld. 4. ábra!

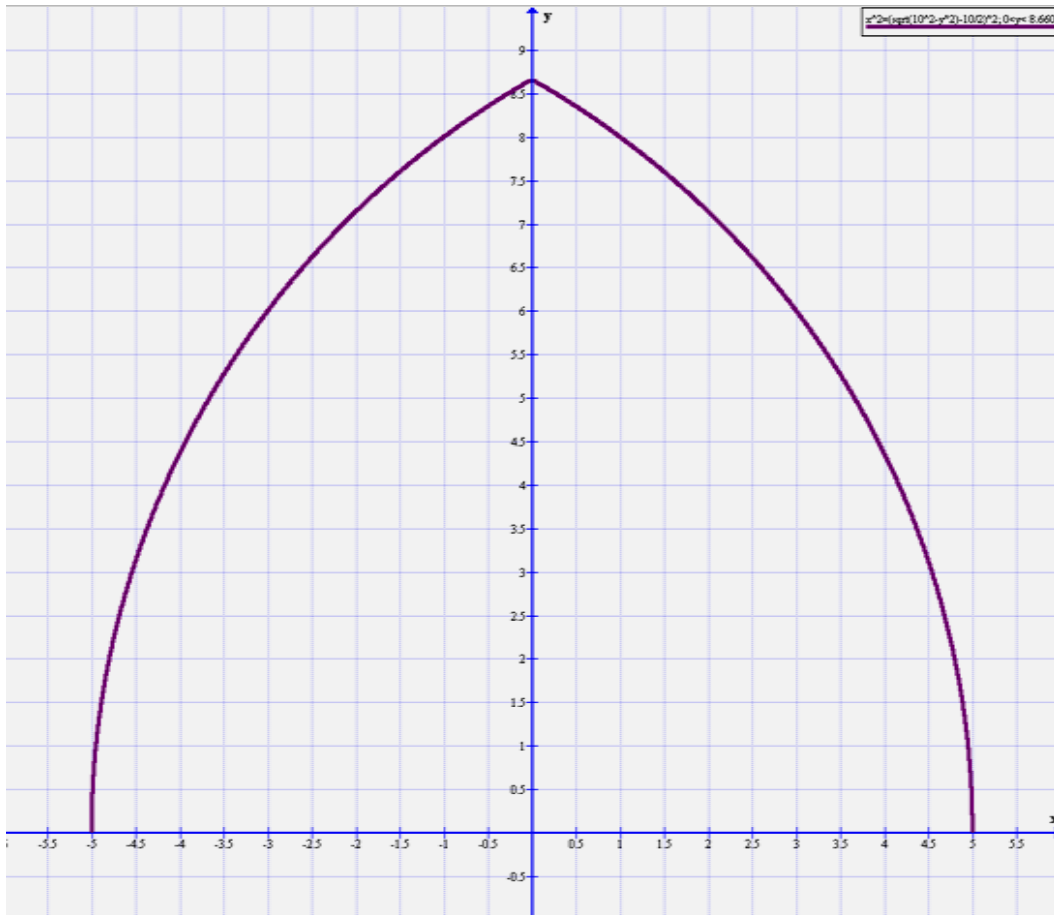


4. ábra

Látjuk, hogy ez tartalmazza az $y < 0$ ordinátájú részeket is, valamint azt is, hogy a vízszintes érintő közelében a görbeágak kezdenek szétesni, bizonyára numerikus okok miatt. Utóbbi azonban minket nem zavar, hiszen azokra a pontokra itt nincs szükség, mert:

$$\underline{0 \leq y \leq y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R.} \quad (9)$$

Most már (8) és (9) - cel megrajzolhatjuk az 5. ábrát:



5. ábra

Azt találtuk, hogy az $f(x, y) = 0$ implicit egyenletű gótikus ív alkalmas összefüggései például az alábbiak lehetnek:

$$\left(\sqrt{R^2 - y^2} - \frac{R}{2} \right)^2 - x^2 = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R. \quad (10)$$

Ezzel kitűzött feladatainkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. Az 1. ábrán olvasható szavakhoz:

- ~ Spannweite: fesztáv;
- ~ Stichhöhe: nyíl(ás)magasság;
- ~ Gotischer Bogen: gótikus ív.

M2. Az érdeklődő Olvasó figyelmébe ajánljuk az *emelt* és a *nyomott csúcsív* munkába

vételét is, az itteni *normál gótikus ív*hez hasonlóan.

M3. Mostanában egyre gyakrabban és bátrabban dolgozunk implicit függvényekkel. Ennek az az oka, hogy egyre jobban kihasználjuk az ingyenesen letölthető **Graph** függvényrajzoló program lehetőségeit. Meglepően hatékony vele a munka.

M4. Érdekes megfigyelni, hogy mennyi az itteni görbevonallú háromszög belső szögeinek összege:

$$\Sigma = 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 300^\circ.$$

Az egyenes szakaszokból álló háromszög esetében ez az összeg mindig pontosan **180°**.

Forrás:

[1] – https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3f/Gotischer_Bogen.JPG

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2021. 05. 04.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>